FUNCIONES

Aplicaciones de las derivadas

@matesconlucia

Recta tangente a la curva

$f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en x_0

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

1º Me dan el punto x_0

Halla la ecuación de la recta tangente a $y = \frac{x^2-2x}{x+3}$ en $x = 3$

$y - f(3) = f'(3)(x-3)$

Calculamos $f(3)$

$f(3) = \frac{3^2-2\cdot3}{3+3} = \frac{9-6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Calculamos $f'(3)$. Para ello calculamos la derivada

$f'(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x+3) - 1\cdot(x^2-2x)}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+6x-2x-6-x^2+2x}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x-6}{(x+3)^2}$

$f'(3) = \frac{3^2+6\cdot3-6}{(3+3)^2} = \frac{9+18-6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

Solución: $y - \frac{1}{2} = \frac{7}{12}\cdot(x-3)$

2º Me dan la pendiente

Rectas paralelas → Misma pendiente

Rectas perpendiculares → El producto de sus pendientes es −1, $m_1 \cdot m_2 = -1$

Halla ecuación de la recta tangente a $y = x^2-5x+6$ paralela a $3x+y-2=0$

Como la recta tangente es paralela a $3x+y-2=0$, entonces tiene la misma pendiente

$3x + y - 2 =$

$y = -3x + 2$ ← pendiente

Calculamos la ecuación de la recta tangente. Tengo que averiguar "a"

$y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$ ← pendiente $\Rightarrow f'(a) = -3$

Calculo la derivada e igualo a "−3"

$f(x) = x^2-5x+6$

$f'(x) = 2x-5 \Rightarrow 2x-5 = -3 \Rightarrow \boxed{x=1}$ Por lo tanto, $a = 1$

Calculamos $f(1)$

$f(1) = 1^2 - 5\cdot1 + 6 = 2$

Solución: $y - 2 = -3\cdot(x-1)$

Monotonía y extremos relativos

Máximo → $f(x)$ pasa de ser creciente a ser decreciente ∩ máximo

Mínimo → $f(x)$ pasa de ser decreciente a ser creciente ∪ mínimo

} $f'(x) = 0$

Para estudiar la monotonía resolvemos $f'(x)=0$, obteniendo así los posibles máximos y mínimos.

CRECIENTE → $f'(x) > 0$ DECRECIENTE → $f'(x) < 0$

Estudia el crecimiento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ y los extremos relativos

Calculamos la derivada. Igualamos a cero ← Como es una función polinómica siempre es continua y derivable

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x\cdot(3x-12) = 0 \Rightarrow x = 0$

$3x - 12 = 0, \quad x = \frac{12}{3} = 4$

Estudiamos el signo.

NÚMEROS QUE PONEMOS EN LA RECTA

1.) Extremos del intervalo
2.) Puntos donde no es continua y no es derivable
3.) Puntos donde la derivada se hace cero

No son EXTREMOS RELATIVOS pero nos ayuda a guiarnos

$x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 12\cdot(-1) = 18 > 0$

$x = 1 \Rightarrow f'(1) = 3\cdot1^2 - 12\cdot1 = 3 - 12 = -9 < 0$

$x = 5 \Rightarrow f'(5) = 3\cdot5^2 - 12\cdot5 = 75 - 60 = 15 > 0$

La función crece $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ y decrece $(0,4)$

Para decir los máximos y mínimos calculamos la imagen de los puntos

$f(0) = 5$ Máximo $(0,5)$

$f(4) = 4^3 - 6\cdot4^2 + 5 = 64 - 96 + 5 = -27$ Mínimo $(4,-27)$

Curvatura y puntos de inflexión

Punto de inflexión → punto donde cambia la curvatura } $f''(x) = 0$

Convexa → $f''(x) > 0$ ∪

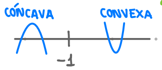
Cóncava → $f''(x) < 0$ ∩

Estudia la curvatura de $f(x) = x^3 + 3x^2$ ← Como es una función polinómica siempre es continua y derivable

Calculamos la segunda derivada e igualamos a cero

$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

Estudiamos el signo



$x = -2 \Rightarrow f''(-2) = -12 + 6 = -6$

$x = 0 \Rightarrow f''(0) = 6$

NÚMEROS QUE PONEMOS EN LA RECTA

1.) Extremos del intervalo
2.) Puntos donde no es continua y no es derivable
3.) Puntos donde la derivada se hace cero

↖ Calculamos su imagen

$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 = -1 + 3 = 2$

La función es cóncava $(-\infty,-1)$ y convexa $(-1,+\infty)$

Punto de inflexión $(-1, 2)$

CC BY NC ND